

【Number School の魅力！】

Number School では、コンピュータやプログラミング機能を利用して、グラフの動きや式変形の動きをアニメーション化するなど、右脳のイメージ領域の活性化と深い理解に役立てる応用性の高い教材が豊富です。

【将来このようなレベルの入試問題がでます】（東工大の難問例）

東京工業大学 AO 入試午前問題

第1類（理学部）特別入学資格試験 課題 I（150分）

【問 I-1】 $n!$ が n^2 の倍数となるような自然数 n をすべて求めよ。

【問 I-2】 正の数 a, b, c が三角形の3辺の長さとなるように動くとき、

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

の取り得る値の範囲を求めよ。

AO 入試午後問題 課題 II（150分）

【問 II-1】 $f(x^2+1) = f(x)^2 + 1$ をみたす n 次の多項式 $f(x)$ が存在するような自然数 n をすべて求めよ。

【問 II-2】 半径1の円に内接する正9角形がある。この正9角形の周上にすべての頂点を持つ正多角形の辺数 n を5つ求めよ。さらに各 n に対し、そのような正 n 角形の例を1つあげて1辺の長さを求めよ。

【問 I-2】 Number School のオリジナル解答例（抜粋）（内部生には詳解配布済）

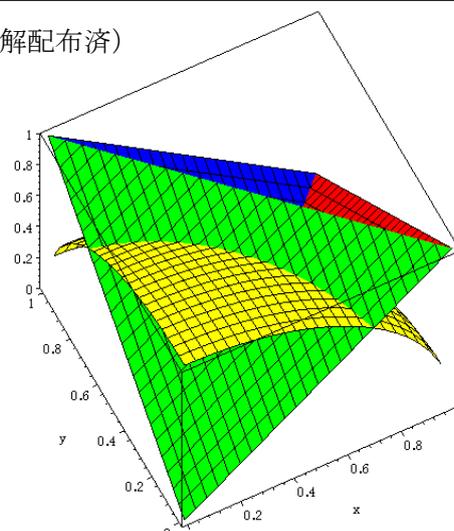
$$\vec{p} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

$$\vec{q} = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

とおくと、 \vec{p}, \vec{q} は単位ベクトルである。

さらに、題意は $\frac{1}{\vec{p} \cdot \vec{q}}$ の取り得る値の範囲である。

$$(\dots \text{中略} \dots) \text{ 求める値の範囲は } 1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} < 2$$



【別解概要】

(i) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$ を利用して $1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$ を示す。

(ii) 三角形の成立条件 $b+c > a, c+a > b, a+b > c$ にそれぞれ a, b, c を順に掛けて左辺と右辺をそれぞれ

加える。 $\Rightarrow 2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$ を導く。この際、 $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} < 2$ について

$a \rightarrow +0, b = c > 0$ のようなつぶれた二等辺三角形で極限値の存在性を考えて $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \rightarrow 2$ を示す。

【その他別解】 東工大のパターン問題解法のテクニックのうち、3変数の処理パターンを利用した解法。